Vorlesung (12), 8.2.2022

Wh.: N-Körperproblem ($N \in \mathbb{N}$), $m_1, \dots, m_N > 0$,

$$m_j \ddot{x}_j = - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{N} m_i m_j \frac{x_j - x_i}{\|x_j - x_i\|^3}$$

Existieren Gl.-Lösungen $(x_0, 0) \in \Omega = Q \times \mathbb{R}^{3N} \subseteq \mathbb{R}^{6N}$,

$$Q = \{ x = (x_j)_{j=1}^{N} \in \mathbb{R}^{3N} : x_i \neq x_j \text{ für } i \neq j \} ?$$

Weil

$$-\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{N} m_i m_j \frac{x_j - x_i}{\|x_j - x_i\|^3} = -D_{x_j} V(x)$$

ist, mit $V : Q \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$V(x) = -\sum_{i<j} \frac{m_i m_j}{\|x_i - x_j\|},$$

muss also $x_0 \in Q$ ein kritischer Punkt von V sein, $D_{x_j} V(x_0) = 0 \quad (j = 1, \dots, N)$. $\square$

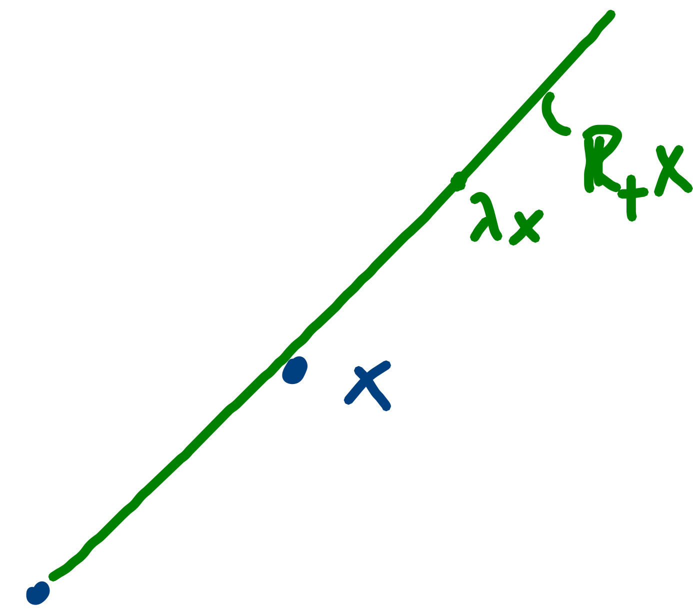
Definition. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, so dass für jedes

$x \in \Omega$ der ganze Strahl

$$\mathbb{R}_+ x = \{ \lambda x \in \mathbb{R}^n : \lambda > 0 \}$$

auch noch in Ω ist (Kegel). Wir sagen, dass eine Funktion $V : \Omega \to \mathbb{R}$ homogen vom Grad $\alpha \in \mathbb{R}$ ist, wenn für alle $x \in \Omega$ und $\lambda > 0$:

$$V(\lambda x) = \lambda^{\alpha} \cdot V(x).$$



Lemma (von Euler). Eine $\mathscr{C}^1$-Funktion $V : \Omega \to \mathbb{R}$ ist genau dann homogen vom Grad $\alpha \in \mathbb{R}$, wenn V folgende partielle Differentialgleichung erfüllt:

$$\sum_{j=1}^{n} x^j D_j V(x) - \alpha \cdot V(x) = 0 . \qquad (*)$$

Beweis. „$\Rightarrow$": Ist V homogen vom Grad α, so differenzieren wir bei festem $x \in \Omega$ die $\mathscr{C}^1$-Funktion

$$h_x : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, \qquad h_x(\lambda) = V(\lambda x).$$

und werten sie bei $\lambda = 1$ aus:

$$\frac{d}{d\lambda} h_x(\lambda) \overset{KR}{=} \sum_{j=1}^{n} D_j V(\lambda x) \cdot \underbrace{\frac{d}{d\lambda}(\lambda x^j)}_{= x^j} \Bigg|_{\lambda = 1}$$

$$= \sum_{j=1}^{N} x^j D_j V(x),$$

und andererseits:

$$\frac{d}{d\lambda}\Big|_{\lambda=1} \left(\lambda^{\alpha} V(x) \right) = \alpha \cdot \lambda^{\alpha - 1} V(x) \Big|_{\lambda = 1} = \alpha V(x).$$

„$\Leftarrow$": Angenommen, V erfülle die Eulersche Dgl. Wir setzen dann für festes $x \in \Omega$ die Funktion

$$h_x : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, \quad h_x(\lambda) = \lambda^{-\alpha} V(\lambda x)$$

Dann ist

$$\frac{d}{d\lambda} h_x(\lambda) = -\alpha \lambda^{-\alpha-1} V(\lambda x) + \lambda^{-\alpha} \sum_{j=1}^{n} D_j V(\lambda x) \cdot \underbrace{\frac{d}{d\lambda}(\lambda x^j)}_{= x^j}$$

$$= + \lambda^{-\alpha-1} \underbrace{\left[-\alpha V(\lambda x) + \sum_{j=1}^{n} D_j V(\lambda x) \cdot (\lambda x^j) \right]}_{= 0} = 0.$$

Es folgt, dass h_x konstant ist und damit

$$\lambda^\alpha V(\lambda x) = h_x(\lambda) = h_x(1) = V(x) \quad , \quad \forall \lambda > 0, \forall x \in \Omega .$$

$\blacksquare$

Satz. Das N-Körperproblem $(N \geq 2)$ hat keine Gleichgewichtslagen.

Beweis. Beachte zunächst, dass $V : Q \to \mathbb{R}$,

$$V(x) = -\sum_{i<j} \frac{m_i m_j}{\|x_i - x_j\|} < 0 \quad , \quad \forall x \in Q,$$

ist, also insbesondere keine Nullstelle hat.

Beachte weiterhin, dass $Q \subseteq \mathbb{R}^{3N}$ ein Kegel ist, denn mit $x \in Q$ ist auch $\lambda x \in Q$, da

$$\| \lambda x_j - \lambda x_i \| = \| \lambda (x_j - x_i) \| = \lambda \cdot \| \underbrace{x_j - x_i}_{\neq 0} \| \neq 0$$

Das zeigt nun auch, dass V homogen vom Grad $\alpha = -1$ ist. Also ist nach Eulers Dgl.

$$V(x) = - \sum_{j=1}^{N} \langle x_j, D_{x_j} V(x) \rangle$$

Ist nun $x_0 \in Q$ ein kritischer Punkt von V, also $D_{x_j} V(x_0) = 0$, $j = 1, \dots, N$, so muss x_0 auch eine Nullstelle von V sein.

$\blacksquare$

Ziel: Finde für $N \geq 3$ wenigstens mal eine einzige Lösung des N-Körperproblems!

(3.10) Das ebene N-Körperproblem

⌈Abgabe von der Hausarbeit ist: 08.03.2022!⌋

Erinnerung: Im Keplerproblem sind alle Bahnen eben (oder sogar geradlinig) und da beim 2-Körperproblem

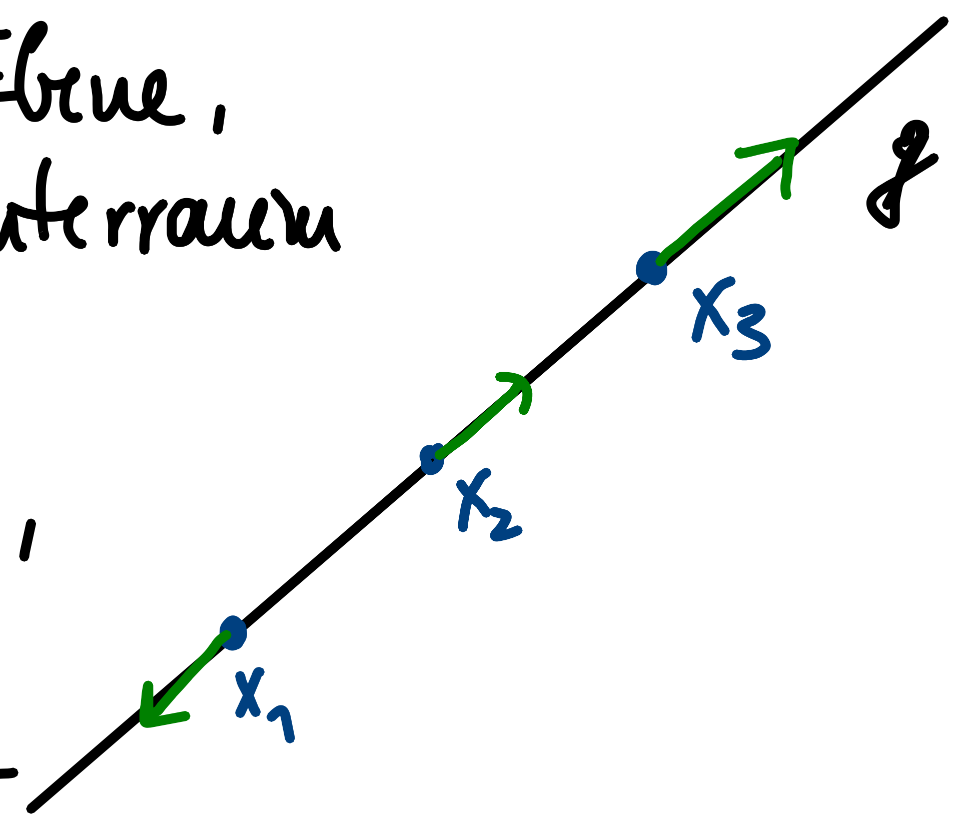
$$x_1(t) = \frac{m_1}{M} x(t), \quad x_2(t) = -\frac{m_2}{M} x(t),$$

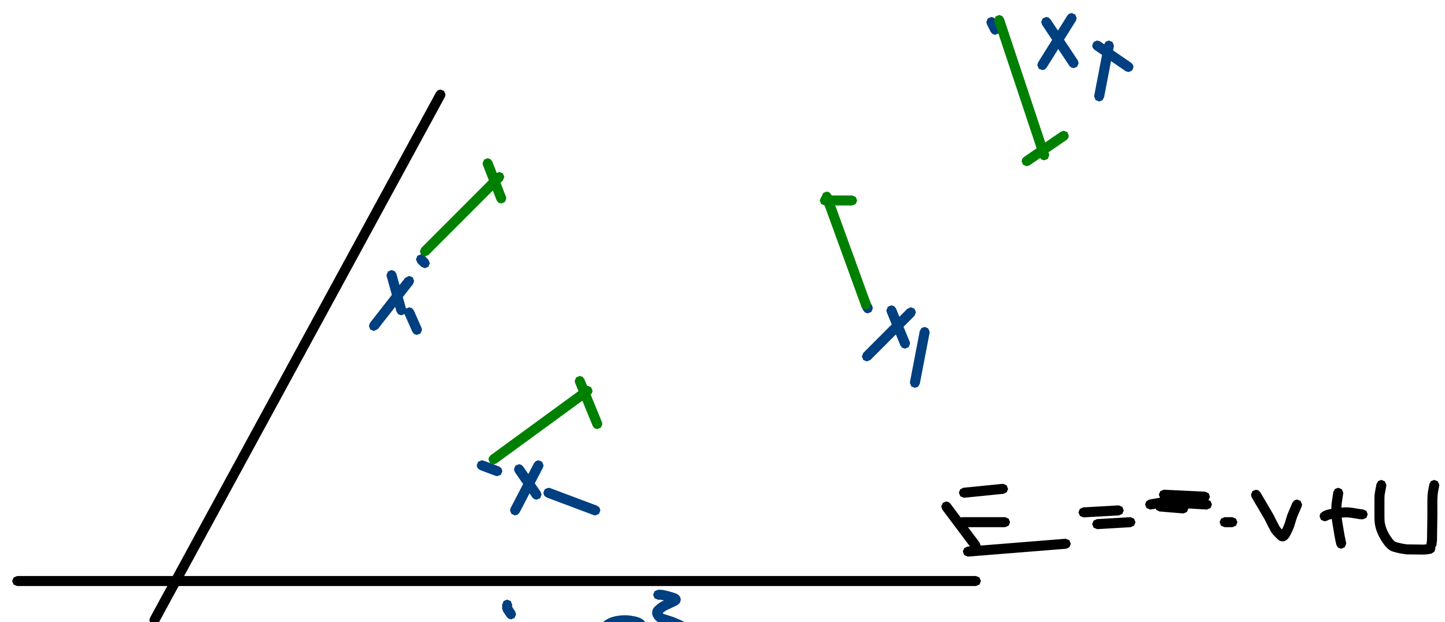
wo x Lösung des Keplerproblems $\ddot{x} = -M \frac{x}{\|x\|^3}$ ist, gilt:
Alle Bahnen im 2-Körperproblem sind eben.

Satz. (a) Sei $g \subseteq \mathbb{R}^3$ eine (affine) Gerade, $v \in \mathbb{R}^3$ und $\ell \subseteq \mathbb{R}^3$ ein 1-dim. Unterraum mit $g = v + \ell$.
Dann gilt:

Gilt für $(x_0,\dot{x}_0)\in\Omega$ im N-Körperproblem $(x_0)_j\in g$, $(\dot{x}_0)_j\in\ell$ für $j=1,\dots,N$, so gilt für die Lösung $t\longmapsto x(t)$ des N-Körperproblems mit $x(0)=x_0$, $\dot{x}(0)=\dot{x}_0$: $x(t)\in g$, $\forall t\in I(x_0,\dot{x}_0)$.

(b) Sei $E\subseteq\mathbb{R}^3$ eine (affine) Ebene, $v\in\mathbb{R}^3$ und $U\subseteq\mathbb{R}^3$ ein 2-dim. Unterraum mit $E=v+U$. Dann gilt: Ist $(x_0,\dot{x}_0)\in\Omega$ mit $(x_0)_j\in E$, $(\dot{x}_0)_j\in U$, für $j=1,\dots,N$, so gilt für die Lösung $t\longmapsto x(t)$ des N-Körperproblems mit $x(0)=x_0$, $\dot{x}(0)=\dot{x}_0$: $x(t)\in E$, $\forall t\in I(x_0,\dot{x}_0)$.





Definition. Sei $\sigma \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $\dot{x}_0 \in \mathbb{R}^3$ und $A \in O(3)$. Dann nennt man

$$f_{\sigma, x_0, A} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$$

$$(s, y, \dot{y}) \longmapsto (t, x, \dot{x})$$

mit:

$$t = s + \sigma$$

$$x = A \cdot y + x_0 + \dot{x}_0 t$$

$$\dot{x} = A \dot{y} + \dot{x}_0$$

eine (allgemeine) Galiläi-Transformation.

Kommentar. Da $O(3) \subseteq \mathrm{Mat}_3\,\mathbb{R}$ eine 3-dimensionale Untermannigfaltigkeit ist (üb. Analysis 3) ist

$$\mathrm{Gal}(\mathbb{R}^3) = \{ f_{\tau, x_0, A} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4 \text{ Gal.-Trafo}, \; \tau \in \mathbb{R},\, x_0 \in \mathbb{R}^3,\, A \in O(3),\, \dot{x}_0 \in \mathbb{R}^3$$

eine ~~7~~ 10-dimensionale (Lie-) Gruppe in $\mathrm{Diff}(\mathbb{R}^4)$. Beachte, dass es auch ~~7~~ 10 erste Integrale für das N-Körperproblem gibt $(H, P, L, \cancel{I})$.

Proposition. $Gal(\mathbb{R}^3)$ operiert auf $\Omega \times \mathbb{R}$ in natürlicher Weise und lässt die Lösungen des N-Körperproblems invariant, d.h.: ist $s \mapsto y(s)$ Lösung, so auch $t \mapsto x(t) = \Phi_{\sigma, x_0, v_0, A}(s, y(s), y'(s))$ ist.

Beweis. Für

$$y_j(s) = A x_j(t-\sigma) + x_0$$

$$y_j'(s) = A \dot{x}_j(t-\sigma) + \dot{x}_0$$

$\Rightarrow$

$$y_j''(s) = A \ddot{x}_j(t-\sigma)$$

und

$$-V(y(s)) = \sum_{i<j} \frac{m_i m_j}{\|y_j - y_i\|} = \sum_{i<j} \frac{m_i m_j}{\|Ax_j - Ax_i\|}$$

$$= \sum_{i<j} \frac{m_i m_j}{\|x_j - x_i\|} (t-\sigma),$$

denn:

$$\|Ax_2 - Ax_1\|^2 = \|A(x_2 - x_1)\|^2$$

$$= \langle A(x_2-x_1), A(x_2-x_1)\rangle = (x_2-x_1)^T \cdot \underbrace{A^T A}_{=\mathbb{1}} \cdot (x_2-x_1)$$

$$= \langle x_2 - x_1, x_2 - x_1 \rangle = \|x_2 - x_1\|^2.$$

Also at:

$$0 = m_j y_j''(s) + \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{N} \frac{m_i m_j}{\|y_j - y_i\|^3}(y_j - y_i)$$

$$= A \cdot m_j \ddot{x}_j(t-\sigma) + \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{N} \frac{m_i m_j}{\|x_j - x_i\|}(Ax_j - Ax_i)\Big|_{t-\sigma}$$

$$= A\left[m_j \ddot{x}_j + \sum_{\substack{i=1 \\ j\neq i}}^{N} \frac{m_i m_j}{\|x_j - x_i\|^3}(x_j - x_i)\right](t-\sigma)$$

$$\Longrightarrow \quad m_j \ddot{x}_j = -\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{N} \frac{m_i m_j}{\|x_j - x_i\|^3}(x_j - x_i), \quad \forall t \in I(x_0, \dot{x}_0). \quad \blacksquare$$

Beweis des Satzes. Nur (b): Nach einer Galilei-Trafo

$$x_j = A y_j + x_0 \quad (j = 1, \dots, N)$$

darf man annehmen: $v = 0$, $\mathcal{U} = \{ x_3 = 0 \}$.
Betrachte dann für $(x_0, \dot{x}_0) \in \Omega \cap \mathbb{R}^{4N}$ das ebene N-Körperproblem

$$m_j \ddot{x}_j = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} \frac{m_i m_j}{\| x_j - x_i \|^3} (x_j - x_i)$$

Eindeutigkeit im Satz von Picard-Lindelöf sichert,

dass dies auch die Lösung des (räumlichen)
N-Körperproblems ist, d.h.: $x(t) \in E$, $\forall t \in I(x_0, \dot{x}_0)$.

$\square$

<u>Komplexe Koordinaten</u> Im ebenen N-Körperproblem notiert man nun üblicherweise

$$z_j = x_j^1 + i x_j^2 \quad (j = 1, \dots, N).$$

Erinnere außerdem an den <u>Wirtinger-Kalkül</u> mit

$$\frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j^1} - i\frac{\partial}{\partial x_j^2}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j^1} + i\frac{\partial}{\partial x_j^2}\right)$$

Damit wird das ebene N-Körperproblem zu:

$$m_j \ddot{z}_j = m_j \ddot{x}_j^1 + i\, m_j \ddot{x}_j^2 = -\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{N} \frac{m_j m_k}{|z_j - z_k|}\left(\mathrm{Re}(z_j) - \mathrm{Re}(z_k)\right)$$

$$= -i \sum \frac{m_j m_k}{|z_j - z_k|}\left(\mathrm{Im}(z_j) - \mathrm{Im}(z_k)\right)$$

$$= -\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{N} \frac{m_j m_j}{|z_j - z_k|}(z_j - z_k) = -\underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial x_j^1} + i\frac{\partial}{\partial x_j^2}\right)}_{= 2\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}} V(z, \bar{z})$$

$$= -2 D_{\bar{z}_j} V(z,\bar{z}), \qquad (*)$$

wo $V : \Omega \to \mathbb{C}$, $\Omega = \{(z_j) \in \mathbb{C}^N : z_j \neq z_k \text{ für } j \neq k\}$

$$V(z,\bar{z}) = -\sum m_j m_k \frac{1}{|z_k - z_j|}.$$

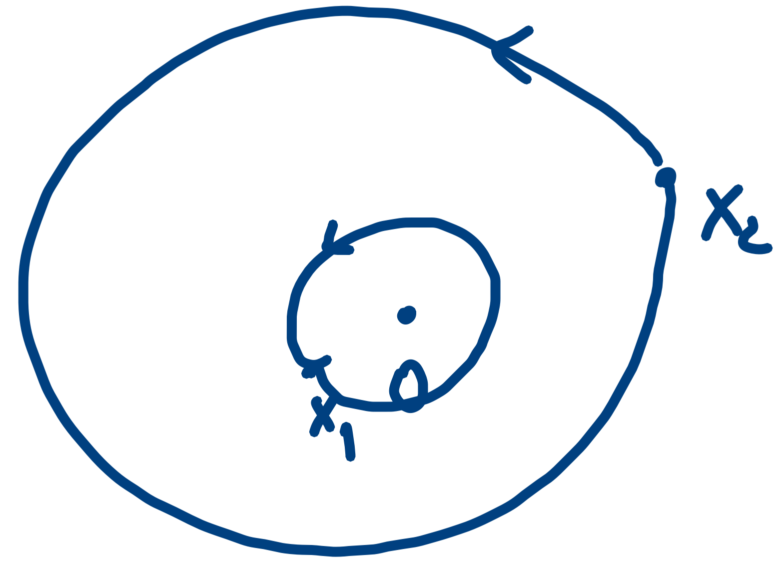
Frage. Was sind denn die einfachsten Lösungen im 2-Körpermodell?

Doch sicher, wenn $t \mapsto z(t) = (z_2 - z_1)(t)$ eine Kreisbahn

$$z(t) = r e^{i\omega t}$$

mit $\omega > 0$ und

$$\omega^2 r^3 = M.$$



vollführt.

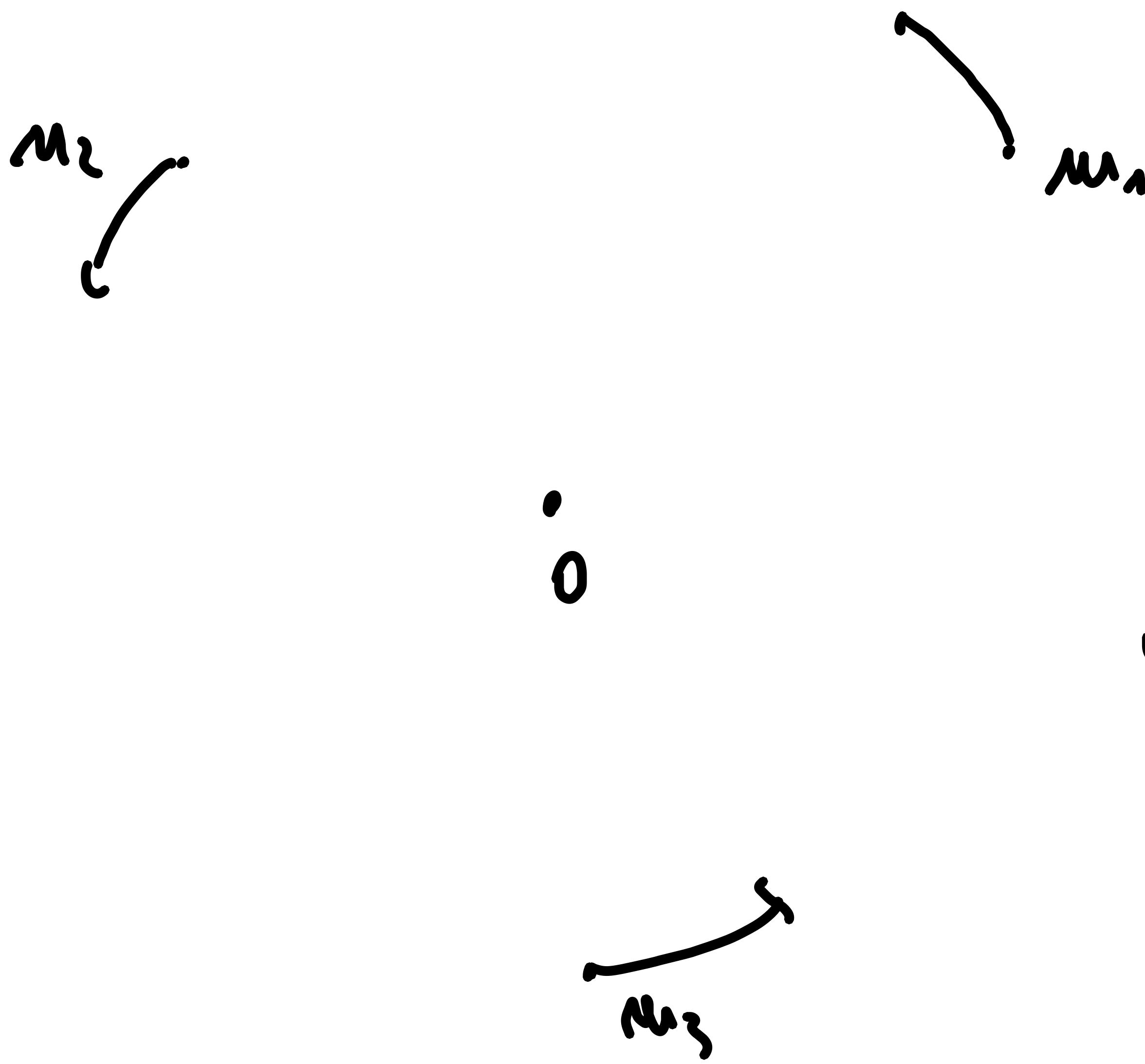
Idee: Gibt es vielleicht Lösung, wo alle Massen Kreisbahnen um gemeinsamen Schwerpunkt $z=0$ mit gleicher Frequenz $\omega>0$ vollführen,

$$z_j(t) = z_j e^{i\omega t}, \quad ((z_1, \dots, z_N) \in \Omega \subseteq \mathbb{C}^n), \ \omega > 0?$$

Mache dazu einen Wechsel in rotierende Koordinaten

$$z_j = w_j e^{i\omega t} \qquad (*)$$

(bei festem $\omega > 0$). $(w_1, \dots, w_N)$ ist dann kein Inertialsystem mehr: das N-Körperproblem in w-Koordinaten wird anders aussehen. Lösungen vom anvisierten Typ werden dann dort Gleichgewichtslagen sein (sogenannte Zentralkonfigurationen).



„Zentralkonfiguration".

Fortsetzung im nächsten Semester: „Ausgew. Kapitel von Dynamischen Systemen" (Fr.: 8–10).